PUISSANCE REELLE D'UN REEL STRICTEMENT POSITIF

1°)Puissance d'exposant réel.

Pour tout réel a strictement positif et tout entier n, $\ln(a^n) = n \ln a$ donc $a^n = e^{n \ln a}$.
L'écriture a^n n'est valable que pour n entier relatif, on veut l'étendre au cas où n n'est pas entier.

Déf : Pour tout réel a strictement positif et tout réel b, on appelle a "puissance" b et on note a^b le réel $e^{b \ln a}$.
pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b = e^{b \ln a}$.
on a alors $\ln(a^b) = b \ln a$

on sait donc maintenant calculer a^b pour
a réel quelconque et b entier strictement positif
a réel non nul et b entier relatif
a réel strictement positif et b réel quelconque.

Propriété 1 : Pour tous réels a et b strictement positifs et tous réels c et d :

$$a^c \times a^d = a^{c+d} ; \quad \frac{1}{a^d} = a^{-d} ; \quad \frac{a^c}{a^d} = a^{c-d} ; \quad (a^c)^d = a^{cd} ; \quad (ab)^c = a^c b^c ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c} .$$

2°)Racines énièmes.

Propriété 2 :
Soit n un entier naturel non nul. Si a est un réel positif, l'équation $x^n = a$ admet une solution unique dans $[0 ; +\infty[$, cette solution est appelée racine énième de a et est notée $\sqrt[n]{a}$, et on a $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

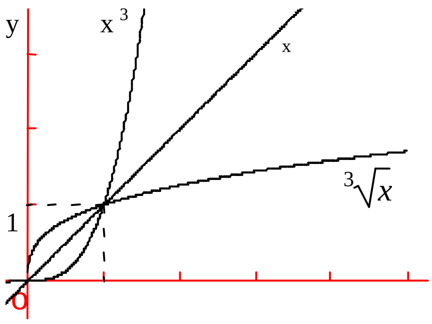
ex : $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.
$9^{\frac{3}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$.

Propriété 3 : Si n est un entier naturel non nul, on appelle fonction racine énième la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
Sur $[0 ; +\infty[$, $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, f est dérivable avec $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

ex $f(x) = \sqrt[3]{x}$ sur $[0 ; +\infty[$.
$f(x) = x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln x}$
$f(8) = 2$

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend left, "x^3"] & 8 \arrow[l, bend left, "\sqrt[3]{x}"] \end{tikzcd}$$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$
quand $x \longrightarrow +\infty$
$\ln x \longrightarrow +\infty$ donc $\frac{1}{3}\ln x \longrightarrow +\infty$ donc $e^{\frac{1}{3}\ln x} \longrightarrow +\infty$.
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.dans un repère orthonormal, les courbes représentant les fonctions $\sqrt[3]{x}$ et x^3 = sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



3°)Fonction puissance α avec α réel.

Propriété 4 : Soit α un réel. La fonction $x \longmapsto x^{\alpha}$ est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \alpha x^{\alpha - 1}$.

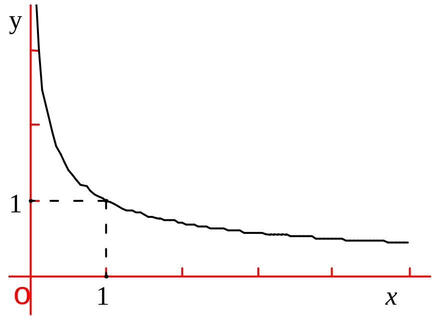
si $\alpha = 0$, $x^0 = e^{0 \ln x} = e^0 = 1$.la fonction est alors constante.

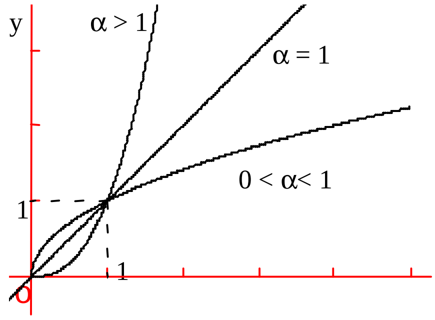
si $\alpha < 0$, $f'(x) < 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	0

si $\alpha > 0$, $f'(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ 0	↗	$+\infty$





<u>Propriété 5</u> : Soit α un réel et u une fonction dérivable, et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto [u(x)]^{\alpha}$ est définie et dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \alpha\,[u(x)]^{\alpha-1}u'(x)$.

<u>4°) Exponentielle de base a.</u>

<u>Déf</u> : soit a > 0; on appelle fonction exponentielle de base a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^{x} = e^{x \ln a}$.

<u>Propriété 6</u> : soit a > 0, la fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{x \ln a} . \ln a = \ln a . a^{x}$.

si 0< a <1, alors ln a < 0

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	↘	0

si 1 < a alors ln a >0

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	$+\infty$

si a = 1, la fonction est constante et égale à 1

remarque : si a = e, on retrouve la fonction exponentielle de base e.